数理解析研究所講究録
285巻 1976年 31-37

強さ6，制約数9，大きさN $(130 \leqq N \leqq 150)$の balanced array の構成

神戸大 教育 白倉 暉弘

§1．序

処理組合せNをもつ分解能 VII の2^m釣合型一部実施要因計画（2^m-BFFD）は強さ6，制約数m，大きさNの balanced array（B-array）からえられることが山本，白倉，桑田[3]によって示された。B-array Tはつぎのように定義される。$m \times N$ $(0,1)$行列Tにおいて，Tの任意の6個の行からなる部分行列T_0の列に weight i $(i=0,1,\cdots 6)$のベクトルが各々μ_i回現われる時，Tは強さ6，制約数m，大きさN，index set $\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_6\}$のB-arrayという。又B-arrayと関係深い simple array（S-array）についても定義しておく。$\Omega(j;m)$ $(j=0,1,\cdots,m)$をweight jのすべて異なる$(0,1)$ベクトル$\binom{m}{j}$個の列からなる$m \times \binom{m}{j}$行列とする。そのとき各々$\Omega(j;m)$をλ_j $(\geqq 0)$個並べて得られる行列はパラメータ$(m;\lambda_0,\lambda_1,\cdots\lambda_m)$をもつS-arrayとよばれる。明らかに上記のS-arrayは

強さ6，制約数 m，大きさ $N=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\lambda_j$，indices $\mu_i=\sum_{j=0}^{m}\binom{m-6}{j-i}\lambda_j$ の B-array である。しかし逆はかならずしもいえない。ここでは $130\leqq N\leqq 150$ を満たす分解能 VII の 2^9-BFFD を生ずる B-array はすべて S-array であることを示す。$m=6,7,8$ の B-array の構成に対しては，白倉[1, 2]を参照のこと。くりかえしをさけるために，特にことわらないかぎり，ここでは B-array は強さ6，制約数 $m=9$，大きさ N，index set $\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_6\}$ の B-array を考えていることにする。

（注意）B-array T が分解能 VII の 2^9 BFFD であるための必要条件は T の異なる列ベクトルの数が少なくとも 130 であるということが[3]によって示されている。このことは $N<130$ となる B-array から分解能 VII の 2^9-BFFD は決して得られないことを意味している。

§2. 諸定理

B-array T に対して，z_k を weight k をもつ T の列ベクトルの数とする。そのとき $z_0=z_9=0$ であるとき T は trim B-array とよばれ，trim B-array によって生ずる design は trim design とよばれる。ここでは $128\leqq N\leqq 150$ を満たす trim B-array T^* に限定して話を進めることにする。

定理 1 trim B-array T^* に対して，

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\text{(a)} & N \geqq 42\mu_3 \\
\text{(b)} & N \geqq \frac{42}{5}(3\rho_2 + \mu_3) \\
\text{(c)} & N \geqq 9\rho_1 + 39\mu_3 \\
\text{(d)} & \rho_1 \geqq \mu_3/3
\end{cases}
$$

ただし $\rho_2 = \mu_2 + \mu_4$, $\rho_1 = \mu_1 + \mu_5$ 。

定理 2　trim B-array T^* に対して, $\mu_3 \geqq 4$ は $N \geqq 168$ を意味する。

定理 3　T^* を分解能 Ⅶ の trim 2^9-BFFD とする。そのとき $\mu_3 \geqq 1$, $\rho_2 > \frac{6}{5}\mu_3$ である。

定理 2, 3 より $\mu_3 = 1, 2, 3$ の場合に限定することができる。

定理 4　T^* を $\mu_3 = 1$, $N \leqq 150$ を満たす分解能 Ⅶ の trim 2^9-BFFD とする。そのとき $5 \geqq \rho_2 \geqq 2$, $12 \geqq \rho_1 \geqq 1$, $6\rho_2 - 3\rho_1 + \rho_0 = 10$ (i.e., $z_4 = z_5 = 0$) である。ただし $\rho_0 = \mu_0 + \mu_6$ 。

定理 5　T^* を定理 4 の design とする。そのとき T^* は ($\lambda_0 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_9 = 0$, $\lambda_3 = 1$) 又は ($\lambda_0 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_9 = 0$, $\lambda_6 = 1$) の S-array である。

<u>定理6</u>　T^*を$\mu_3=2$, $N\leqq 150$を満たす分解能VIIのtrim 2^9-BFFDとする。そのとき$5\geqq\rho_2\geqq 3$, $8\geqq\rho_1\geqq 1$である。

<u>定理7</u>　$\mu_3=2$, $\rho_2=5$, $N\leqq 150$を満たすtrim B-array T^*は存在しない。

<u>定理8</u>　$\mu_3=2$, $\rho_2=4$, $128\leqq N\leqq 150$を満たすtrim B-array T^*は存在しない。

<u>定理9</u>　$\mu_3=2$, $\rho_2=3$, $128\leqq N\leqq 150$を満たすtrim B-array T^*は存在しない。

<u>定理10</u>　T^*を$\mu_3=3$, $N\leqq 150$を満たす分解能VIIのtrim 2^9-BFFDとする。そのとき$\rho_2=4$, $3\leqq\rho_1\leqq 2$, $3\rho_1=\rho_0+3$ (i.e., $z_4+z_5=126$, $z_2=z_3=z_6=z_7=0$, $z_1+z_8=9(\rho_1-1)$)である。

<u>定理11</u>　定理10のdesign T^*は$\lambda_0=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_9=0$, $\lambda_4+\lambda_5=1$のS-arrayである。

§3. 定理4, 5の証明

<u>補題1</u> trim B-array T^* に対して

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&(a)\quad y_1 = -16\mu_3 + 15\rho_2 - 12\rho_1 + 7\rho_0 \geqq 0\\
&(b)\quad y_2 = 4(23\mu_3 - 21\rho_2 + 15\rho_1 - 5\rho_0) \geqq 0\\
&(c)\quad y_3 = 28(-7\mu_3 + 6\rho_2 - 3\rho_1 + \rho_0) \geqq 0\\
&(d)\quad y_4 = 14(10\mu_3 - 6\rho_2 + 3\rho_1 - \rho_0) \geqq 0
\end{aligned}
$$

ただし $y_1 = z_1 + z_8$, $y_2 = z_2 + z_7$, $y_3 = z_3 + z_6$, $y_4 = z_4 + z_5$。

<u>補題2</u> T' を $\mu_3 = 1$ となる強さ6, 制約数 $m = 8$ の B-array とする。そのとき T' は $\lambda'_4 = 0$, $\lambda'_3 + \lambda'_5 = 1$ となるパラメータ $(8; \lambda'_0, \lambda'_1, \cdots, \lambda'_8)$ をもつ S-array である。

<u>補題3</u> B-array T に対して, $0 \leqq k \leqq 6$ となるある整数 k に対して $\mu_k = 0$ ならば T は S-array である。

<u>定理4の証明</u> 不等式 $5 \geqq \rho_2 \geqq 2$, $12 \geqq \rho_1 \geqq 1$ は (1a, b, c) と定理3から明らかである。さて $T^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, 9)$ を trim B-array T^* の i 行を除いて得られる $8 \times N$ 行列とする。そのとき $T^{(i)}$ は又 $\mu_3 = 1$ となる強さ6, 制約数8の

B-arrayなので，補題2から$T^{(i)}$は$\lambda_4^{(i)}=0$となるパラメータ$(8;\lambda_0^{(i)},\lambda_1^{(i)},\cdots,\lambda_8^{(i)})$をもつS-arrayである。$\lambda_k^{(i)}$は行列$\Omega(k;8)$が$T^{(i)}$の部分行列として現われる回数なので，$\lambda_4^{(i)}=0\ (i=1,2,\cdots,9)$は$y_4=z_4+z_5=0$を意味する。よって(2d)から$6\rho_2-3\rho_1+\rho_0=10$がわかる。

<u>定理5の証明</u> 定理4と(2c,d)から$z_3+z_6=84$, $z_4=z_5=0$である。ふたたびB-array $T^{(i)}$を考える。補題2より，$T^{(i)}$は$\lambda_4^{(i)}=0$，$\lambda_3^{(i)}+\lambda_5^{(i)}=1$となるS-arrayである。$\lambda_k^{(i)}$は非負整数なので，$\lambda_3^{(i)}=1$あるいわ0に応じて$\lambda_5^{(i)}=0$あるいわ1となる。今ある$i$に対して$\lambda_3^{(i)}=1$, $\lambda_5^{(i)}=0$ならば，すべての$j\ (=1,2,\cdots,9)$に対して$\lambda_3^{(j)}=1$, $\lambda_5^{(j)}=0$が成り立つことを示す。$z_4=0$，$\lambda_3^{(i)}=1$から$z_3\geqq 56$がわかる。さて$\lambda_3^{(j)}=0$, $\lambda_5^{(j)}=1$となるjが存在したと仮定しよう。そのとき$z_5=0$なので$z_6\geqq 56$ よって$z_3+z_6\geqq 112$が成り立たなければならない。しかしこれは$z_3+z_6=84$に矛盾。よって$\lambda_3^{(i)}=1$, $\lambda_5^{(i)}=0$ならば$z_3=84$，$z_6=0$が成り立つ。よって一般性を失うことなくT^*はつぎのように表現することができる.

$$T^*=[\,T_{(1)}\,:\,T_{(2)}\,:\,T_{(3)}\,:\,T_{(7)}\,:\,T_{(8)}\,]$$

ただし $T_{(k)}$ は weight k の列ベクトルからなる行列。T^* の任意の6個の行からなる部分行列において，weight 3の列ベクトルが現われる個数は $T_{(3)}$ のみによっているので，$T_{(3)}$ はそれ自身 $\lambda_3=1$ となる S-array であることがわかる。$T_{(3)}$ は又強さ6の B-array であるので，残りの部分行列 $[T_{(1)} : T_{(2)} : T_{(7)} : T_{(8)}]$ も又強さ6の B-array であり，その index set は $\{\mu_0', \mu_1', \mu_2', \mu_3'=0, \mu_4', \mu_5', \mu_6'\}$ の型をしている。補題3よりこの部分行列は S-array である。よって T^* は $\lambda_0=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_9=0$，$\lambda_3=1$ となる S-array である。同様にして $\lambda_3^{(i)}=0$，$\lambda_5^{(i)}=1$ の場合にも T^* は $\lambda_0=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_9=0$，$\lambda_6=1$ となる S-array であることが証明できる。

References

[1] T. Shirakura (1976). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution VII, $6 \le m \le 8$. Ann. Statist. 4.

[2] 白倉 (1974). Balanced design に関連した balanced array について。数理研講究録 211 13-24

[3] S. Yamamoto, T. Shirakura and M. Kuwada (1975). Balanced array of strength $2l$ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27 143-157.